ҲОСИЛА ОЛДИДА КАСР ДАРАЖАЛИ ПАРАМЕТР ҚАТНАШГАН ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ АСИМПТОТИК ЕЧИМЛАРИНИ ТУЗИШ.

Алишев А. Жиззах давлат педагогика университети
Усаров Ж. Жиззах давлат педагогика университети

Annotatsiya

Hosila oldida kasr darajali parametr qatnashgan integro-differensial tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasi bitta nol oddiy ildizga ega bo'lgan kritik hol uchun asimptotik yechimlar tuzilgan.

Kalit so'zlar: Xarakteristik tenglama, vektor, matritsa, asimptotik, sistema.

Annotation

Asymptotic solutions for the critical case in which the characteristic equation of the system of integro-differential equations with a fractional parameter before the derivative has one zero simple root are constructed.

Key words: Characteristic equation, vector, matrix, asymptotic, system.

Аннотация

Построены асимптотические решения для критического случая, когда характеристическое уравнение системы интегро-дифференциальных уравнений с дробным параметром перед производной имеет один нулевой простой корень.

Ключевые слова: Характеристическое уравнение, вектор, матрица, асимптотика, система.

Ушбу ишда

$$\varepsilon^{p/q}\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x + \varepsilon\int_0^L K(\tau,\sigma,\varepsilon)x(s,\varepsilon)ds + \varepsilon f(\tau,x,\varepsilon)\,, \qquad (1)$$

кўринишдаги секин ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бўлмаган интегро-дифференциал тенгламалар системасининг ечимларини тузиш масаласини қараймиз, бунда $x(t,\varepsilon)\,, f(\tau,x,\varepsilon) - n-$ ўлчовли векторлар, $x(t,\varepsilon)-$номаълум, берилган $n-$ўлчовли $A(\tau,\varepsilon), K(\tau,\sigma,\varepsilon)$ квадрат матрицалар $\varepsilon > 0$ кичик параметрнинг даражалари бўйича яқинлашувчи қаторга ёйилади.

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m A_m(\tau),\;\; K(\tau,\sigma,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m K(\tau,\sigma)\,, \qquad (2)$$

$f(\tau,x,\varepsilon) - n-$ўлчовли вектор $(\tau,x_0,0)$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйилади. $\tau = \varepsilon t$ ва $\sigma = st, [0,L]$ оралиқда секин ўзгарувчилар p ва q ўзаро туб сонлар.

(1) – системанинг асимптотик интегралаш

$$\det[A_0(\tau) - \lambda E] = 0 \qquad (3)$$

характеристик тенгламанинг илдизларига боғлиқ. (3) – тенгламанинг илдизлари $\lambda_1(\tau) \equiv 0, Re\lambda_i(\tau) < 0 \;\; i = \overline{2,n}$, бўлган критик ҳолни қараймиз. Шунингдек номаълум $x(t,\varepsilon)$ – векторни аниқлаш учун умумлашган тескари матрица усулини қўллаймиз.

(1)- системанинг асимптотик ечимларининг кўринишини қўйидаги теорема аниқлайди.

Теорема-1. Агар қўйидаги шартлар бажарилса:

a) $A_m(\tau)$, $K_m(\tau,\sigma)-$ матрицалар $\tau\epsilon[0,L], f(\tau,x,\varepsilon)$ вектор $P(\tau,x,\varepsilon) = P(\tau,x)(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$ соҳада, бунда $P(\tau,x) - \tau, x$ ўзгарувчилар фазосининг соҳаси бўлиб чексиз дифференциаланувчи бўлсин;

b) $\forall\tau\epsilon[0,L]\ \lambda_k(\tau) \equiv 0\ (k = 1, k < n),, Re\lambda_k(\tau) \le 0\ , (k = \overline{2,n})$, яъни $A_0(\tau)$ битта оддий ноль хос қийматга эга бўлсин.

У ҳолда (1)- система $p < q$ ҳол учун

$$x(t,\epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m u_m(\tau) \qquad (4)$$

кўринишдаги формал хусисий ечимга эга бўлади.

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун (4) қаторни (1) системага қўйиб ва $f(\tau, u(\tau,\mu), \mu^q)$ векторни $(\tau, u(\tau), 0)$ нуқта атрофида Тейлор қаторга ёйилмасини этиборга олиб

$$\mu^p u'(\tau,\mu) = A(\tau,\mu^q)u(\tau,\mu) + \mu^q \int_0^L K(\tau,\sigma,\mu^q)u(s,\mu)ds + \mu^q\{f(\tau,u_0,0) + \mu f_x(\tau)u_1(\tau) + \cdots + \mu^s\left[f_x(\tau)u_s(\tau) + f_{s-1}(\tau) + \tilde{f}_{s-1-q}(\tau)\right] + \cdots\} \qquad (5)$$

$f_1(\tau) = \frac{\partial^{s+1-q}}{\partial\mu^{s+1-q}}\ \ s = (q, q+1, \dots)$ матрицанинг элементлари ва $f_1(\tau) = \frac{\partial t}{\partial\varepsilon}$ векторнинг координаталари $(\tau, u_0(\tau), 0)$ нуқтада ҳисобланади.

$f_s(\tau)$ векторлар $x_k(\tau)$ $(k = 0,1, \dots, s-1)$ орқали ифодаланади.

(5)- тенгламадан μ параметрнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб $u(\tau,\mu)$ номаълум векторни аниқлаш учун қўйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$A_0(\tau)u_i(\tau) = 0,\ \ i = \overline{0,p} - 1, \qquad (6)$$

$$A_0(\tau)u_j(\tau) = u'_j(\tau),\ \ qj = \overline{p,q}, \qquad (7)$$

$$A_0(\tau)u_m(\tau) = u'_{m-q}(\tau) + T_0(\tau), \qquad (8)$$

бунда

$$T_0(\tau) = \sum_{i=1}^{[\frac{m}{q}]} A_i(\tau)u_{m-iq}(\tau) + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{q}\right]} \int_0^L K_i(\tau,\sigma)u_{m-iq}(\tau)ds - f(\tau,u_0,0) - \left[f_x(\tau)u_{m-q}(\tau) + f_{m-1-q}(\tau) + \tilde{f}_{m-2q+1}(\tau)\right],\ \ m = q,\ q+1, \dots, 2q-1$$ бўлганда $f_{s-2q+1}(\tau) = 0$, бунда $[\frac{m}{q}]$, $\frac{m}{q}$ нисбатнинг бутун қисми

(4) қаторнинг номаълум ҳадларини (6) – (8) тенгламаларнинг ечимга эга эканлигини кўрсатамиз.

(6)- тенгламадан [1] ишга асосан

$$u_i(\tau) = \varphi\eta_i(\tau),\ \ i = 0, \overline{p-1}, \qquad (9)$$

ни аниқлаймиз, бунда $\eta_i(\tau)$, барча $\tau\epsilon[0,L]$ лар учун кейинги қадамларда аниқланадиган номаълум функциялар. $\varphi\epsilon N(A_0(\tau))$ (векторнинг 1.чи координатаси 1 га қолган координаталари 0 га тенг).

(7)- тенглама (9)-ифодага асосан

$$A_0(\tau)u_j(\tau) = \varphi\eta'_j(\tau)\ \ , \ j = \overline{p,q}\ , \qquad (10)$$

кўринишга эга. (10)- тенглама учун ечим мавжуд бўлиш шарти

$$\left(\psi, \varphi\eta'_j\right) = (\psi,\varphi)\eta'_j(\tau) = 0 \qquad (11)$$

дан иборат, бунда ψ ва φ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $(\psi\varphi) = 1$. ψ, $A_0(\tau)$ матрицанинг қўшмаси бўлган $A_0^*(\tau)$ матрицанинг хос қиймати бўлиб n −координатаси 1 га қолган координаталари нолга тенг бўлган вектор. У ҳолда (11)-тенгликдан

$$\eta_j'(\tau) = 0\,.$$

бундан $\eta'_j(\tau) = \mathrm{C}_1$, ни аниқлаймиз. C_1 − ихтиёрий ўзгармас. (10)-тенглама учун ечим мавжуд бўлиш шарти ўринли, у ҳолда бу тенгламани ечими

$$u_j(\tau) = A_0^+(\tau)\varphi\eta_j'(\tau) + \varphi\eta_j(\tau), \qquad (12)$$

бунда $\eta_j(\tau)$ $j = \overline{p,q}$ кейинги қадамларда аниқланадиган номаълум функция, $A_0^+(\tau)$ − умумлашган тескари матрица қаралаётган ҳол учун

$$A_0^*(\tau) = [A_0(\tau) + (\psi\otimes\varphi)]^{-1} - (\varphi\otimes\psi) \qquad (13)$$

кўринишга эга.

номаълумларни аниқлашни давом эттириб (8)-тенгламани

$$A_0(\tau)u_m(\tau) = \varphi\eta'_{m-q}(\tau) + T_0(\tau) \qquad (14)$$

кўринишда ёзамиз. Ечим мавжуд бўлиш шарти

$$(\psi, \left(\varphi\eta'_{m-q}(\tau) + T_0(\tau)\right) = 0$$

(15)

кўринишга эга бўлади. Бу тенгламадан $(\psi, \varphi) = 1$ шартни эътиборга олиб

$$\eta'_{m-q}(\tau) + \left(\psi, T_0(\tau)\right) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (15)-тенгламани интегралаб

$$\eta_{m-q}(\tau) = -\int(\ \psi, T_0(\tau))d\tau + C_{m-q}$$

(16)

ечимга эга бўламиз, C_{m-q}- ихтиёрий ўзгармас.

(14)-тенглама учун ечим мавжуд бўлиш шарти ўринли, у ҳолда ундан

$$U_m(\tau) = A_0^+(\tau)\left[\varphi\eta'_{m-q}(\tau) + T_0(\tau)\right] + \varphi\eta_m(\tau)\,, \qquad (17)$$

бунда $\eta_m(\tau)$-кейинги қадамда аниқланадиган номаълум функция. 1-теорема исботланди.

Энди тузилган формаль ечимнинг [3,4] манодаги асимптотик хоссага эга эканлигини кўрсатувчи қуйидаги теоремани келтирамиз.

2-Теорема. (1)-система учун 1-теореманинг барча шартлари бажарилсин, $f(\tau, x_m, \varepsilon)$ вектор учун ўзгармас l бўйича Липщиц шарти бажарилсин;

$$\|f(\tau, u, \mu) - f(\tau, u_m, \mu)\| \le l\|u - u_m\|\,, \qquad (18)$$

шунингдек

$$u(\tau, \mu)/_{t=0} = u_m(\tau, \mu)/_{t=0} \qquad (19)$$

тенглик ўринли бўлсин, бунда $x_m(t, \varepsilon)$ (1)-системанинг m −чи яқинлашувчи ечими

$$x_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s u_s(\tau)\,, \qquad (20)$$

$u(\tau, \mu)$-(1)- системанинг аниқ ечими.У ҳолда хар қандай етарлича катта $L > 0$ ва ўзгармас C учун шундай $\mu\epsilon(0, \varepsilon_0]$ ни мос қўйиш мумкинки, $0 \le t \le \frac{L}{\varepsilon}$ оралиқда

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \le \mu^{m+1-q}c \qquad (21)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Фойдаланилган Адабиётлар

1. Алишев А., Алишев Ш., А. Оддий дифференциал тенгламалар системасини асимптотик интераллаш.-Т.: “Фан ва технология”, 2016, 260-б.
2. Фешенко С. Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.-К.: Наукова думка; 1966, 252-с.
3. Метропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.-М.: Наука, 1964, 432-с.