ВОСТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ОПЕРАТОРА ДИРАКА ПО ДАННЫМ НАБОРАМ СПЕКТРОВ



Абдуназаров Рабимкул, Илёс Жавбосов
Джизакский филиал Национального университета Узбекистана.

Аннотация.

Рассматривается задача восстановления спектральные данные оператора Дирака по данным наборам спектров. Предложен эффективный алгоритм численного решения обратной задачи, реализующий дискретизированный вариант известного процедуры Гельфанда Левитана.

Ключевая слова: обратная задача для оператора Дирака, процедура Гельфанда Левитана, ядро спектральной меры, собственная числа, краевая задачи для системы Дирака.

Annotation.

The problem of restoring the spectral data of the Dirac operator from the given sets of spectra is considered. An effective algorithm for the numerical solution of the inverse problem is proposed, implementing a discretized version of the well-known Gelfand-Levitan procedure.

Keywords: inverse problem for the Dirac system, Gelfand Levitan procedure, spectral measure kernel, eigenvalues, boundary value problem for the Dirac system.

Рассмотрим в $L_2[0,\pi]$ самосопряжённый оператор Дирака

$$\mathrm{D[y]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dy}{dx} + \begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{bmatrix} y, \quad y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}, \quad 0 \le x \le \pi,$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные действительные функии. Пусть задача на собственные значения оператора

$$\mathrm{D[y]} = \lambda y \tag{1}$$

при граничных условиях

$$y_1(0)\cos\gamma + y_2(0)\sin\gamma = 0 \tag{2}$$

$$y_1(\pi)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0 \tag{3}$$

порождает дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, а при граничных условиях

$$y_1(0)\cos\theta + y_2(0)\sin\gamma = 0$$

$$y_1(\pi)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0$$

дискретный спектр $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Здесь $\gamma, \theta, \beta -$ разные действительные числа.

Известно [1], что по спектрам $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ однозначно определяются ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ и, следовательно, по ним восстанавливаются функции $p(x)$, $q(x)$.

В настоящей работе будет произведена численная реализация решения обратной задачи по данным наборам спектров при различных граничных условиях в одном конце интервала. Предлагаются эффективные методы вычисления опреатора (1)-(3) с некоторой точностью по данным наборам спектров $\{\lambda_n\}_{-N}^{N}$ и $\{\mu_n\}_{-N}^{N}$. Полное решение данной задачи состоит из последовательно решаемых следующих четырёх подзадач:

I. Определение коэффициентов асимптотики спектре.

II. Вычисление ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ при $n < N$.

III. Вычисление ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ при $n > N$

IV. Восстановление функции $p(x)$, $q(x)$ по дискретизированному интеграла Гельфанда- Левитана.

Для проведения оценок точности вычислений будем считать, что выходные данные $\{\lambda_n\}_{-N}^{N}$ и $\{\mu_n\}_{-N}^{N}$ нам заданы с точностью до $\varepsilon = 0(\frac{1}{N^5})$. Априорные требования на гладкость восстанавливаемого потенциала следующие: $p^{(4)}(x), q^{(4)}(x) \in L_2[0,\pi]$.

Так как подзадачи III, IV хорошо изучена в работах [2], [3], [4], [5], мы изучаем лишь первые двух подзадач.

Задача I. Пусть $p^{(4)}(x), q^{(4)}(x) \in L_1[0,\pi]$. Тогда собственные значение $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ при больших n имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_n = n - \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \frac{\alpha_4}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Нам задано $2N-1$ число $\{\lambda_n\}_{-N}^{N}$ с точностью до $\varepsilon = O\left(\frac{1}{N^5}\right)$.

Пользуясь методами разностного исчисления, определяем значения $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Вычисления осуществляются по формулам [2]-[6]:

$$\alpha_4 = \frac{\Delta_2 W_N - \Delta_2 W_{\frac{N}{2}}}{G[N, N/2]} + O\left(\frac{1}{N^2}\right); \quad \alpha_1 = \frac{\Delta_2 W_{-N+2}}{2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

$$-\frac{\alpha_0}{\pi}=\frac{\Delta_2 W_N}{2}-\frac{\alpha_4}{2}\left[\frac{6N^2-12N+4}{N^2(N-1)^2(N-2)^2}\right]+O\left(\frac{1}{N^6}\right),$$

$$\alpha_2=W_N+\frac{\alpha_0}{\pi}N^2-\frac{\alpha_4}{N^2}+O\left(\frac{1}{N^4}\right),\alpha_3=W_{-N+2}-\alpha_1 N^2+O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

где

$$W_n=\frac{\lambda_n+\lambda_{-n}}{2}n^2,\quad W_{-n}=\frac{\lambda_n-\lambda_{-n}-2n}{2}n^3,$$

$$\Delta_2 W_n=W_n-2W_{n-1}+W_{n-2},$$

$$G\left(N,\frac{N}{2}\right)=\frac{6N^2-12N+4}{N^2(N-1)^2(N-2)^2}-\frac{96N^2-384N+256}{N^2(N-2)^2(N-4)^2}=O(\frac{1}{N^4})$$

Здесь предполагается, что N −четный.

Задача II. В наших предположениях собственные значения $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ имеют асимптотику (7), а также

$$\mu_0=n-\frac{\theta}{\pi}+\frac{\beta_1}{n}+\frac{\beta_2}{n^2}+\frac{\beta_3}{n^3}+\frac{\beta_4}{n^4}+O\left(\frac{1}{n^5}\right),$$

где константы β_i $(i=0{,}4)$ вычисляются как указано в задаче I.

Получим рабочую формулу для вычисления $[a_n]^{-1}$ при $n<N$. Согласно [1], восстановление ядра по двум спектрам производится формулой

$$\frac{1}{a_n}=\left[\frac{\sin(\gamma-\theta)}{\mu_n-\lambda_n}\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}\right]^{-1} \tag{4}$$

Можно заметить, что формула (4) содержит в себе очень медленно сходящееся бесконечное произведение и непосредственное использование этой формулы привело бы к большой потере точности. Поэтому формулу (4) необходимо преобразовать так, чтобы выражения для $[a_n]^{-1}$ не содержали бы медленно сходящих бесконечных произведений. Для этого преобразуем бесконечное произведение (сходящееся как $\sum_{k=1}^{\infty}O(\frac{1}{k^2})$) с целью убыстрения его сходимости. Введем следующие обозначения:

$$f_1(\lambda_k)=k^2+\lambda_k\lambda_{-k}-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2+2\alpha_1,\ \ f_2(\lambda_k)=\lambda_k+\lambda_{-k}+\frac{2\gamma}{\pi},$$

$$\bar{\lambda}_n^2=(\lambda_n+\frac{\gamma}{\pi})^2-2\alpha_1,\qquad \tilde{\lambda}_n^2=(\lambda_n+\frac{\theta}{\pi})^2-2\beta_1$$

$$R_1'=\alpha_1^2+2\alpha_3+\frac{2\alpha_0\alpha_2}{\pi},\quad R_1=\beta_1^2+2\beta_3+\frac{2\beta_0\beta_2}{\pi}.$$

$$\Psi_1(\lambda_n)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\left[1-\frac{f_1(\lambda_k)-\lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2-\bar{\lambda}_n^2}\right],$$

$$\Psi_2(\lambda_n)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\left[1-\frac{f_1(\mu_k)-\lambda_n f_2(\mu_k)}{k^2-\tilde{\lambda}_n^2}\right],$$

$$\Psi_3(\lambda_n)=\frac{(\lambda_n-\lambda_{-n})\left(n^2-\tilde{\lambda}_n^2\right)(\lambda_0-\lambda_n)\tilde{\lambda}_n\sin\left(\pi\bar{\lambda}_n\right)}{\left[n^2-\tilde{\lambda}_n^2-f_1(\mu_n)+\lambda_n f_2(\mu_n)\right]\left(n^2-\bar{\lambda}_n^2\right)(\lambda_n-\mu_0)\bar{\lambda}_n\sin\left(\pi\tilde{\lambda}_n\right)}.$$

После некоторой алгебраической операции над формулой (8) получим

$$a_n=\sin(\gamma-\theta)\,\Psi_3(\lambda_n)\frac{\Psi_1(\lambda_n)}{\Psi_2(\lambda_n)} \tag{5}$$

С целью убыстрения сходимости произведений, встречающихся в (5), для $\Psi_1(\lambda_n)$ записываем

$$\Psi_1(\lambda_n) = exp\left\{\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} ln\left[1 - \frac{f_1(\lambda_k) - \lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2 - \bar{\lambda}_n^2}\right]\right\} = exp\left\{\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\right\}.$$

Так как для $k > N$

$$f_1(\lambda_k) = -\frac{R_1'}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right), \qquad f_2(\lambda_k) = \frac{2\alpha_2}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right),$$

имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} = \sum_{k=N+1}^{\infty} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n\right)}\right] + O(\frac{1}{N^6}) \qquad (6)$$

Если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - a^2)k^2} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi^2}{6a^2} - \frac{\pi}{2a^3} ctg(a\pi),$$

$$ln\left[1 + \frac{1}{N^2(N^2 - a^2)}\right] \approx \frac{1}{N^2(N^2 - a^2)} + O(\frac{1}{N^6})$$

при больших N, для (6) имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] \approx (R_1' + 2\alpha_2\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] = (R_1' + 2\alpha_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\bar{\lambda}_n{}^4} - \frac{\pi^2}{6\bar{\lambda}_n{}^2} - \frac{\pi}{2\bar{\lambda}_n{}^3} ctg\left(\bar{\lambda}_n\pi\right)\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2)}\right] + O(\frac{1}{N^6})$$

Отсюда

$$\Psi_1(\lambda_n) = exp\left\{\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} ln\left[1 - \frac{f_1(\lambda_k) - \lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2 - \bar{\lambda}_n^2}\right] - \sum_{k=1}^{N} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right]\right.$$

$$\left. + (R_1' + 2\alpha_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\bar{\lambda}_n{}^4} - \frac{\pi^2}{6\bar{\lambda}_n{}^2} - \frac{\pi}{2\bar{\lambda}_n{}^3} ctg\left(\bar{\lambda}\pi\right)\right]\right\} =$$

$$= \prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N}\left[1 - \frac{f_1(\lambda_k) - \lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2 - \bar{\lambda}_n^2}\right] / \prod_{k=1}^{N}\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] \times$$

$$\times exp\left\{(R_1' + 2\alpha_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\bar{\lambda}_n{}^4} - \frac{\pi^2}{6\bar{\lambda}_n{}^2} - \frac{\pi}{2\bar{\lambda}_n{}^3} ctg\left(\bar{\lambda}\pi\right)\right]\right\}$$

Аналогично вычисляется и $\Psi_2(\lambda_n)$. Получим:

$$\Psi_2(\lambda_n) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N}\left[1 - \frac{f_1(\mu_k) - \lambda_n f_2(\mu_k)}{k^2 - \tilde{\lambda}_n^2}\right] / \prod_{k=1}^{N}\left[1 + \frac{R_1 + 2\beta_2\lambda_n}{k^2(k^2 - \tilde{\lambda}_n^2)}\right] \times$$

$$\times exp\left\{(R_1 + 2\beta_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\tilde{\lambda}_n^{\,4}} - \frac{\pi^2}{6\tilde{\lambda}_n^{\,2}} - \frac{\pi}{2\tilde{\lambda}_n^{\,3}} ctg(\tilde{\lambda}_n\pi)\right]\right\}$$

Подставляя вычисленные значения $\Psi_1(\lambda_n)$ и $\Psi_2(\lambda_n)$ в (5), получим рабочие формулы для вычисления $[a_n]^{-1}$ при $n < N$.

Литература

1. Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т. Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке // ДАН Аз.ССР. Т.22. 7.(1966) - С.3-6.

2. Abdunazarov R. PROBLEMS OF CONSTRUCTING AN EFFICIENT COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR RESTORING THE PARAMETERS OF THE STURM-LOUISVILLE OPERATOR //International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research. – 2023. – Т. 1. – №. 1. – С. 79-86.

3. Абдуназаров, Р. (2023). Bir o‘lchovli Dirak tenglamasi uchun teskari masalani yechishda tezkor hisoblash algoritmini qurish masalalari . Информатика и инженерные технологии, 1(2), 186–191. извлечено от https://inlibrary.uz/index.php/computer-engineering/article/view/25033

4. Абдуназаров, Р., & Маматов, А. (2023). ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА. *Interpretation and Researches*, *1*(5). извлечено от https://interpretationandresearches.uz/index.php/iar/article/view/114

5. R Abdunazarov. УСКОРЕНИИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА. Issue 1 of 2023 (143/1) 1 (145), 5-12. https://axborotnoma.uz/en/research/2579/