О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ



Соатов Улугбек Абдукадирович
доцент Джизакского политехнического института

Аннотация

В данной статье рассмотривается некоторые задачи геометрии, касающиеся использования метода координат в пространстве. Известно, что чертежи играют ключевую роль в решении задач методами элементарной геометрии, но выбор того или иного чертежа обычно требует изобретательности. Необходимость создания единых инструментов для решения геометрических задач, связанных с исследованием кривых различной формы, была решена созданием координатного метода, которая позволяет решать геометрические задачи с помощью инструментов алгебры. Оно играет важную роль, имеет вспомогательное значение для практики, а также требует очень мало изобретательности при решении задач.

Ключевые слова: точка, прямая, плоскость, расстояние, координата, вектор, векторное произведение, уравнение, площадь, объём, октаэдр, сфера, поверхность, треугольник, гран, радиус.

Annotatsiya

Ushbu maqolada fazoda koordinatalar usulini qo‘llash bilan bog‘liq ba‘zi geometriya masalalari qaralgan. Ma’lumki, elementar geometriya usullaridan foydalanib masalalarni yechishda chizmalar asosiy rol o‘ynaydi, Lekin, u yoki bu chizmani tanlash odatda zukkolikni talab qiladi. Turli shakllardagi egri chiziqlarni o'rganish bilan bog'liq geometrik masalalarni yechish uchun yagona vositalarni yaratish zarurati algebra vositalaridan foydalangan holda geometrik muammolarni hal qilish imkonini beruvchi koordinata usulini yaratish orqali hal qilindi. U amaliyot uchun yordamchi sifatida muhim ro‘l o‘ynaydi, shuningdek muammolarni hal qilishda juda kam zukkolik talab qiladi.

Kalit so‘zlar: nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik, masofa, koordinata, vektor ko‘paytma, tenglama, yuza, hajm, oktaedr, sfera, sirt, uchburchak, qirra, radius.

Annotation

This article discusses some geometry problems related to the use of the coordinate method in space. It is known that drawings play a key role in solving problems using elementary geometry methods, but the choice of one or another drawing usually requires ingenuity. The need to create unified tools for solving geometric problems associated with the study of curves of various shapes was solved by the creation of the coordinate method, which allows solving geometric problems using algebra tools. It plays an important role, is auxiliary to practice, and also requires very little ingenuity in solving problems.

Key words: point, straight line, plane, distance, coordinate, vector, vector product, equation, area, volume, tetrahedron, octahedron, sphere, surface, triangle, gran, radius, center of gravity.

В элементарной геометрии изучается свойства прямолинейных фигур и окружностей. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играет подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобрета-тельности и это составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии. Это трудность была решена созданием координатного метода и возникновением аналитической геометрии (Р.Декарт, 1637 г.) из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач с тем чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы . В нем важную роль играют вспомогательное значение, вследствие которого решение задач требует гораздо меньше изобретательности.

Способ определения положения точек с помощью чисел (координат) называется методом координат. Сущность метода координат на плоскости (в пространстве) состоит в том, что всякой линии на ней (поверхности в нем), как правило, сопоставляется ее (его) уравнение. Свойства этой линии (поверхности) изучаются путем исследования уравнения линии (поверхности). Мы рассмотрим некоторые задачи геометрии, касающиеся использования метода координат в пространстве. Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, сфера радиуса R с центром в точке O_1 есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O_1 на расстоянии R. Прямоугольная система координат Oxyz в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z - их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Задача 1. Составить уравнение множества точек, для которых сумма квадратов расстояний от точек $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ и $Д(0;0;1)$ равно 16. Какую фигуру определяет искомое уравнение.

Решение. Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка искомой фигуры, характеристическое свойство фигуры состоит по условию в том, что

$$|AM|^2+|BM|^2+|CM|^2+|ДM|^2=16.$$

Переходя к координатам получаем

$$x^2+y^2+z^2+(x-1)^2+y^2+z^2+x^2+(y-1)^2+z^2+x^2+y^2+(z-1)^2=16.$$

Отсюда, приводя подобные члены, получим

$$x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=4.$$

Чтобы выяснить геометрический смысл этого уравнения, представим его в следущей форме:

$$(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{4})^2+(z-\frac{1}{4})^2=\frac{67}{16}.$$

Видим, что искомая фигура является сферой с центром в точке с координатами $(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4})$ и радиусам $\frac{1}{4}\sqrt{67}$.

Задача 2. Составить уравнение поверхности правильного октаэдра, оси которого совпадает с осями координат (рис.1).

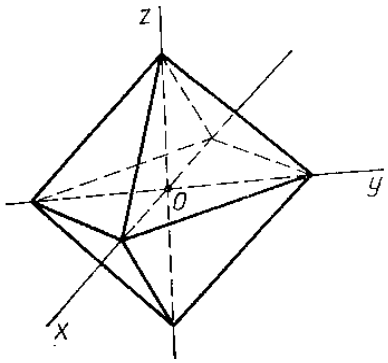

рис. 1

Решение. Рассмотрим сначала ту грань октаэдра, которая расположена в первом октанте. Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка этой грани ABC. Соединив точку M с вершинами A, B и C и с началом координат O, разобьём тетраэдр OABC на три треугольные пирамиды: MOAC, MOBC, MOAB, основаниями которых будем считать треугольники OAC, OBC и OAB. Сумма объемов этих пирамид равно объему тетраэдра OABC.

Обозначим площади каждого из этих треугольников через S, расстояние $|OA|=|OB|=|OC|$ через a. Тогда, с одной стороны, сумма объемов рассматриваемых пирамид будет $\frac{1}{3}Sx+\frac{1}{3}Sy+\frac{1}{3}Sz=\frac{1}{3}(x+y+z)$, а с другой стороны объем всего тетраэдра OABC (если принять за его основание ΔAOB, площадь которого равно S, а за высоту

расстояние $|OC| = a$) будет равен $\frac{1}{3}Sa$. Приравнивая эти значения объемов, получаем, что для любой точки $M(x;y;z)$ грани ABC при $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$: $x + y + z = a$.

При составлении уравнений поверхности для других октантов, где координаты точек могут иметь и отрицательные значения, ход рассуждений остается тем же при условии использование не самых координат, а их значений. В результате получаем, что точка $M(x;y;z)$ октаэдра удовлетворяет уравнению $|x| + |y| + |z| = a$, каждое решение которого, в свою очередь, определяет точку октаэдра. Следовательно, это и есть уравнение поверхности.

Задача 3. Составить уравнение сферы, проходящий через четыре данные точки $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1,1,1)$.

Решение. Точка $M(x;y;z)$ принадлежит сфере с центром $P(x_0;y_0;z_0)$ и радиусом r тогда и только тогда, когда $|PM| = r$, т.е.. когда

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Этому уравнению должны удовлетворять. В частности, координаты заданных точек O, A, B, C. Подставляя эти координаты в уравнение искомой сферы, получим систему уравнений относительно x_0, y_0, z_0 и r:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 \\ x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 = r^2 \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - z_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

Решая полученную систему находим: $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{2}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, уравнение искомой сферы имеет вид: $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

Задача 4. Какой фигурой является множество точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B имеет постоянное значение C?

Решение. Выберем точку A за начало координат и примем прямую AB за ось абсцисс. Тогда точка B будет иметь координат $(b;0;0)$. Пусть теперь $M(x;y;z)$ - произвольная точка искомого множества. Тогда $|MA|^2 - |MB|^2 = C$ или $x^2 + y^2 + z^2 - (x-b)^2 - y^2 - z^2 = c$. Отсюда, $x = \frac{c + b^2}{2b}$. Следовательно, искомая фигура является плоскостью, перпендикулярной прямой AB и отстоящий от точки A на расстояние $\left|\frac{c + b^2}{2b}\right|$.

Задача 5. Зная вершину $A(1;1;1)$ квадрата ABCД, его центр $O(0;0;0)$ и вектор $\vec{a} = (2;-1;-1)$ перпендикулярной плоскости квадрата, найти остальные его вершины.

Решение. Так, как вектор $\overrightarrow{ОД}$ перпендикулярен как вектору $\overrightarrow{OA}$, так и вектору $\overrightarrow{ОД}$ перпендикулярен вектору $\left[\overrightarrow{OA}, \vec{a}\right]$ (векторное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{a}$). Кроме того, $\left|\overrightarrow{ОД}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|$ и $\left[\left|\overrightarrow{OA}, \vec{a}\right|\right] = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \vec{a}$. Следовательно, $\overrightarrow{ОД} = \frac{(\overrightarrow{OA}, \vec{a})}{|\vec{a}|}$. Зная координаты вектора

$\overrightarrow{OA} = (1;1;1)$, определим $\left[\overrightarrow{OA}, \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0;3;-3)$. Так как, $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, то $\overrightarrow{OД} = (\pm 0; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \mp\sqrt{\frac{3}{2}})$. Поэтому вершину Д и В квадрата соответственно имеет координаты $(0; \sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(0; -\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}})$. Так как, точка С симметричная точке А относительно начала координат $O(0;0;0)$ то $C(-1;-1;-1)$.

Изучение любого математического курса немыслимо без выработки навыков, решения задач приобретает особое значение для студентов и других, позволяя им самостоятельно контролировать ступень усвоения материала. В этой работе изучали некоторые задачи геометрии, в результате решения которых изучается применения метода координат в пространстве. С необходимым теоритическим материалом следует ознакомится в работах [1] и [2]. В работах [3-7] изучены различные задачи, направленные укреплению способностей и знаний по математике учеников, студентов и магистрантов.

Использованная литература.

1. Атанасян Л.С. Геометрия 4.1. М. Просвещение 1973.
2. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия 4.1.М. Просвещение 1974.
3. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2022). ABOUT THE METHODS OF SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS. *Journal of Academic Research and Trends in Educational Sciences*, *1*(5), 1-7.
4. Soatov, U. A. (2022). Tenglamalarni yechishning grafik usuli haqida. *Science and Education*, *3*(8), 7-12.
5. Abdukadirovich, S. U., & Abdug'oniyevich, D. U. B. (2022, November). ABOUT THE METHODS OF SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS AT THE SCHOOL LEVEL. In *E Conference Zone* (pp. 49-56).
6. Abdukadirovich, S. U., & Abdug'oniyevich, D. U. B. (2023). GEOMETRIK MASALALARNI YECHISHDA ASOSIY TUSHUNCHALARNI BIRGALIKDA QO'LLASH. *Conferencea*, 45-50.