ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА СУБМЕРСИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО



PhD, Шарипов Хуршид Фазлиддинович
Джизакский филиал Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Аннотация: В данной работе изучается дифференциальные инварианты второго порядка субмерсий относительно группы движений в трехмерном пространстве Минковского.

Ключевые слова: Риманово многообразие, дифференциальные инварианты, субмерсия, векторное поле.

Пусть M -риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, G - группа преобразований многообразия M.

Определение -1. Функция $F: M \to R$ называется инвариантом группы преобразований (1), если $F(x) = F(gx)$ для каждого элемента $g \in G$.

Пусть G группа Ли, преобразавний риманова многообразия M. Если группа G является k-мерной группой Ли, тогда она имеет равно k инфинитезимальных образующих (векторный полей).

Для группы вращений евклидовой плоскости инфинитезимальными образующими являются векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Известна следующая теорема [2].

Теорема 1. Функция $F(x)$ является инвариантом группы преобразова-ний G только и только тогда, когда имеет место

$$XF = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

для каждой инфинитезимальной образующей $X = \sum_{1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ группы G.

Преобразования Галилея плоскости Галилея задаются формулами

$$X^t : (x, y) \to (x + ty, y) \qquad (2)$$

Преобразования Галилея порождается векторным полем

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} \qquad (3)$$

Любая функция вида $F(x, y) = F(y)$ является инвариантом группы преоб-разований Галилея.

В данной работе изучается дифференциальные инварианты второго порядка субмерсий $\varphi: M \to B$ относительно группы движений риманова многообразия. Этот вопрос для Евклидовых пространств изучен в работах [1], [4].

Определение. Пусть M, B - гладкие многообразия и $p \in M$. Пусть $f, g: M \to B$ гладкие отображения, удовлетворяющие условию $f(p) = g(p) = q$.

1) f имеет касание первого порядка с g в точке p, если $(df)_p = (dg)_p$ как отображения $T_pM \to T_pB$.

2) f имеет касание k-го порядка с g в точке p, если отображение $(df): TM \to TB$ имеет касание порядка $(k-1)$ с отображением (dg) в каждой точке

T_pM . Этот факт записывается следующим образом: $f :_k g$ в точке p (k -положительное число).

Обозначим через $J^k(M,B)_{p,q}$ - множества классов эквивалентности по отношению «$:_k$ в точке p» в пространстве отображений $f: M \to B$, удовлет-воряющие условию $f(p) = q$. Положим $J^k(M,B) = \bigcup_{(p,q)\in M\times B} J^k(M,B)_{p,q}$.

Определение. Множество $J^k(M,B)$ называется пространством k –джетов.

Действие группы G на M порождает некоторое действие группы на $J^k(M,B)$. Это действие называется k- продолжением группы G на $J^k(M,B)$. Инфинитезимальными образующими k-го продолжение группы G на $J^k(M,B)$ являются k- продолжения инфинитезимальных образующих группы G.

Например, первыми и вторыми продолжениями векторного поля $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ являются векторные поля $X_3{}^{(1)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+y'^2)\frac{\partial}{\partial y'}$ и $X_3{}^{(2)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+y'^2)\frac{\partial}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial}{\partial y''}$.

Определение 4. Функция $I \in C^\infty(J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}).)$ называется дифферен-циальным инвариантом порядка k группы G, если она сохраняется под действием k -го продолжения G на $J^k(R^n,R)$, то есть $g^{(k)}(I) = I$ для любого преобразования $g^{(k)} \in G^{(k)}$.

Теорема 2. [3]. Функция I является инвариантом порядка k группы преобразований G только и только тогда, когда она является первым интегралом инфинитезимального образующего группы G^k.

Теперь рассмотрим субмерсию $f: R_3^1 \to R$, где R_3^1-трехмерное пространство Минковского. Напомним, что в этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2.$$

С движением в пространстве Минковского связаны знаменитые преобразования Лоренца. Преобразования Лоренца вместе с преобразованием вращения вокруг начала координат образует группу Г. Группа Г порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (4)$$

$$X_4 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (5)$$

$$X_5 = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (6)$$

$$X_6 = -x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (7)$$

$$X_7 = h(u)\frac{\partial}{\partial u}, h(u) \in C^\infty(\mathbb{R}). \quad (8)$$

Координатами в $J^2(\mathbb{R}_1^3,\mathbb{R})$ являются наборы $(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33})$.

Дифференциальные инварианты второго порядка-это функции на $J^2(\mathbb{R}_1^3,\mathbb{R})$, инвариантные относительно продолжения действия Г в $J^2(\mathbb{R}_1^3,\mathbb{R})$.

Как известно [3], контактное векторное поле с производящей функцией f имеет вид

$$X_f = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}. \qquad (9)$$

Соответственно продолжения векторного поля X_f в $J^2(\mathbb{R}_1^3, \mathbb{R})$ имеет вид

$$X_f{}^{(2)} = X_f + \sum_{i\le j} f_{ij}\frac{\partial}{\partial p_{ij}}, \qquad (10)$$

В работе [4] показано, что размерность орбиты общего положения в $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ равна $n + C_n^2 + 3$, поэтому в нашем случае, размерность алгебры инвариантов второго порядка равна $13 - 9 = 4$.

Пусть $g = g(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33})$ - дифференциальный инвариант второго порядка. Тогда g является первым интегралом для контактных векторных полей $X_f{}^{(2)}$ вида (10) с производящей функцией $h(u)$. Кроме того, g-инварианты группы движений. Отсюда следует, что $g = g(p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33})$.

Рассмотрим случай $h(u) = u$.

$$X_u = u\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \qquad (11)$$

$$X_u{}^{(2)} = u\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{3} p_1 p_i \frac{\partial}{\partial p_{1i}} + \sum_{2\le i\le j\le 3} p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{ij}}. \qquad (12)$$

Отсюда находим следующие инварианты:

$$g_1 = H = \frac{D}{B^{3/2}},\ g_2 = K = \frac{F}{B^2},$$

$$g_3 = H^2 + \frac{AD + BC}{B^2}, g_4 = HK - \frac{AF - BE}{B^{5/2}},$$

где,

$$A = -p_{11} + p_{22} + p_{33}, B = -{p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2$$

$$C = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & -p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{13} & -p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = -\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_1 \\ p_{12} & -p_{22} & -p_2 \\ p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} & p_1 \\ p_{13} & -p_{33} & -p_3 \\ p_1 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} & p_2 \\ p_{23} & p_{33} & p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & -p_{22} & -p_{23} \\ p_{13} & -p_{23} & -p_{33} \end{vmatrix}, F = \begin{vmatrix} -p_{11} & -p_{12} & -p_{13} & -p_1 \\ -p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_2 \\ -p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_3 \\ -p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что инварианты g_1 и g_2 определяет соответственно среднюю и Гауссову кривизны поверхности.

Список использованных литератур.

1. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии/ Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - Москва: ВИНИТИ. 1988-28.-298 с.
2. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. Москва издательство Мир -1977
3. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. Москва: Знание, 1989. -48с.-(Новое в жизни, науке, технике. Сер. "математика, кибернетика" N8)
4. Кузаконь В. М. Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2006, т.3, N3,-с 201-212