CHIZIQLI BO’LMAGAN TENGLAMALAR SISTEMASINING ILDIZLARI SONI VA NYUTON KO’PYOQLARI

Sharipov Sanjar Sobirovich
Jizzax Sambhram universiteti NTM o‘qituvchisi



Annotatsiya

Mazkur tezisda algebraik tenglamalar sistemalarini yechimlari sonini topish uchun Nyuton ko‘pyoqlisi metodidan foydalanish masalasi qaralgan. Bunda berilgan tenglamalar sistemalarini darajalaridan foydalanib Nyuton ko’pyoqlisi tuzib olinib, ular yordamida tenglamalar sistemasini yechimlari sonini topish masalalari keltirib o’tilgan.

Kalit so‘zlar: Nyuton ko‘pyoqlari, tenglama, tenglamalar sistemasi, ko‘phadlar, Sistema yechimlari, Bezu teoremasi.

Аннотация

В данной тезисе рассматривается задача использования полиномиального метода Ньютона для нахождения числа решений систем алгебраических уравнений. В данном случае полином Ньютона создавался с использованием степеней данной системы уравнений и с их помощью ставились задачи нахождения числа решений системы уравнений.

Ключевые слова: полиномы Ньютона, уравнение, система уравнений, полиномы, системные решения, теорема Безу.

Annotation

In this thesis, the problem of using Newton's polynomial method to find the number of solutions of systems of algebraic equations is considered. In this case, Newton's polynomial was constructed using the degrees of the given system of equations, and the problems of finding the number of solutions of the system of equations were presented using them.

Key words: Newton's polynomials, equation, system of equations, polynomials, System solutions, Bezou's theorem.

Ikki o’zgaruvchili haqiqiy koeffisientli ikkita tenglamalar sistemasini qaraymiz

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemaning yechimlari soni bilan bog’liq Bezu teoremasini keltiramiz

Bezu teoremasi F_1 va F_2 ko’phadlarning darajalari mos ravishda *m* va *n* ga teng bo’lsin . U holda (1) sistemaning yechimlari soni yoki cheksiz ,yoki *mn* dan oshmaydi.

Bu teoremadagi $m \cdot n$ ni undan kichik son bilan almashtirib bo’lmaydi, chunki shunday sistemalar borki, uning yechimlari soni aynan *mn* ga teng.Masalan

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)\dots(x-m)=0 \\ (y-1)(y-2)\dots(y-n)=0 \end{cases}$$

Lekin ba’zi sistemalar uchun Bezu teoremasidagi baho juda yuqori. Buni masalan

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 \end{cases} \qquad (2)$$

sistemada ko’rishimiz mumkin. Bezu teoremasiga ko’ra bu sistemaning yechimlari soni agar chekli bo’lsa, 16 dan oshmaydi . Lekin bu sistemani bevosita yechib qaralganda yechimlar umumiy holatda 4 ta ekanligini ko’rish mumkin . Bu misoldan ko’phadning darajasi bilan bog’liq bu masalani daraja ko’rsatkichi bilan yanada aniqroq bog’lash kerakligi g’oyasi kelib chiqadi. Darhaqiqat, ko’p o’zgaruvchili $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ko’phaddagi har bir qo’shiluvchi $ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ haddagi $m_1+m_2+\dots+m_n$ yig’indi bu hadning darajasini, qo’shiluvchi hadlar darajalarining eng kattasi esa ko’phadning darajasini ifodalaydi. Demak, ko’phad darajasini ifodalovchi sonda aniq bir o’zgaruvchining “ulushi” qandayligini bilish qiyin. Bu albatta bunday ko’phadlar bilan bog’liq masalalarni aniq yechishga imkon bermaydi. I.Nyuton ko’p o’zgaruvchili ko’phad darajasini umumlashtiruvchi , har bir hadda qatnashayotgan har bir o’zgaruvchining darajasini hisobga oluvchi butun koordinatali nuqtalar to’plamini tuzadi. Buning uchun *P* ko’phadda qatnashuvchi nolmas koeffisientli $ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ birhadga *n*- o’lchamli koordinatalar fazosida $(m_1,m_2,\dots,m_n)$ koordinatali nuqtani belgilaydi. Ko’phadni barcha hadlari bo’yicha topilgan bunday nuqtalar *D(P)* to’plamning qavariq qobig’ini, ya’ni uni o’zida saqlovchi eng kichik qavariq ko’pyoqni tuzadi. Bu ko’pyoq keyinchalik Nyuton ko’pyoqi deb atala boshlandi [1]. Uni N*(P)* bilan belgilaymiz.

Hozirgi zamon matematikasining darajali geometriya deb ataluvchi bo’limida tenglamalar yechimlarining xossalari uning Nyuton ko’pyoqlisi yordamida o’rganiladi. Biz mazkur maqolada ko’p o’zgaruvchili algebraik tenglamalar sistemalarining yechimlari sonini aniqlashda Nyuton ko’pyoqlilarining tadbiqlarini qarab chiqamiz. Natijalar ikki o’zgaruvchili tenglamalar sistemalari uchun keltiriladi.

Ma’lumki $A+B$ to’plam quyidagicha aniqlanadi:

$$A+B=\{x+y|x\in A, y\in B\}$$

Quyidagi teorema o’rinli:

Teorema: Haqiqiy koeffsientli F_1, F_2 ko’phadlar uchun

$$\begin{cases}F_1(x,y)=0\\F_2(x,y)=0\end{cases}$$

sistemaning yechimlari soni yoki cheksiz yoki (kompleks ildizlar bilan) $S\big(N(F_1)+N(F_2)\big)-S\big(N(F_1)\big)-S(N(F_2))$ songa teng bo’lib, bunda $S\big(N(F)\big)$ ifoda $N(F)$ to’plamning yuzasini ifodalaydi.

Bu teoremaning isboti rossiyalik matematik I.A.Bernshteyn, A.G.Kushnerenko, A.G.Xovanskiylarning algebraik tenglamalar sistemasining yechimlar sonini aniqlashga bag’ishlangan [2] ishlaridagi teoremadan kelib chiqadi.

Bu teorema tadbiqlarini misollarda qarab chiqamiz.

1-misol. Maqola boshida keltirilgan

$$\begin{cases}a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0\\a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0\end{cases}\quad(2)$$

sistemani qaraymiz.

Yechish: Bu sistema uchun

$$D(F_1)=\{(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(0,0)\},$$

$$D(F_2)=\{(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

$$D(F_1)+D(F_2)=\left\{\begin{matrix}(4,0),(3,1),(2,2),(3,0),(2,1),(2,0),(3,1)\\(2,2),(1,3),(1,2),(1,1),(0,3),(0,4),(0,2),(1,0)(0,1),(0,0)\end{matrix}\right\}$$

dan iborat bo’lib, ular uchun $N(F_1), N(F_2)$ va $N(F_1)+N(F_2)$larni tuzib ularning yuzalarini topamiz. $N(F)$ larni tuzishni kompleks daftar varag’ida chizib ham hisoblash mumkin. Ko’pburchak uchlarining koordinatalari berilganda uning yuzasini hisoblashning kompyuter dasturi [3] da keltirilgan bo’lib, bu dastur bo’yicha yuzalarni tezda hisoblab olish mumkin.

Hisoblashlar

$$S\big(N(F_1)\big)=S\big(N(F_2)\big)=2,\ S\big(N(F_1)+N(F_2)\big)=8$$

teng ekanligini, va demak, keltirilgan teoremaga ko’ra sistemaning yechimlari soni umumiy holda $8-2-2=4$ ga tengligi kelib chiqadi.

Agar biror koeffsient nolga teng bo’lsa, o’sha hol uchun $D(F)$lar tuzilib, $S\big(N(F)\big)$lar hisoblanib, yechimlar sonini aniqlashtirish mumkin.

2-misol.

$$\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0\\2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0\end{cases}\quad(3)$$

sistema yechimlar sonini topamiz.

Yechish: Bu sistemaning yechimlari 4 ta bo’lib, ular $(-3,-1),(-1,-2),(3,1),(1,1)$ ga teng. Endi ularni yuqoridagi teorema yordamida sonini to’g’riligini aniqlaymiz:

$$D(F_1)=D(F_2)=\{(2,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,0)\}$$

$$D(F_1)+D(F_2)=\{(4,0),(3,1),(3,0),(2,2),(2,1),(2,0),(1,3),(1,2),$$
$$(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

$$S\big(N(F_1)\big)=S\big(N(F_2)\big)=2,\qquad S\big(N(F_1)+N(F_2)\big)=8$$

Demak, (3) sistemaning umumiy holdagi yechimlari soni 4 ga (8-2-2=4) teng ekan.

3-misol.

$$\begin{cases}x^3+xy^2=40y\\y^3+x^2y=10x\end{cases}\quad(4)$$

sistemaning yechimlar sonini topamiz.

Yechish: Berilishiga ko’ra

$$D(F_1)=\{(3,0),(1,2),(0,1)\},\ D(F_2)=\{(0,3),(2,1),(1,0)\}$$

$$D(F_1) + D(F_2) = \{(3,3), (5,1), (4,0), (1,5), (2,2), (1,1)\}$$

$N(F)$ larni topib, ularning ularning yuzalarini topamiz:

$$S\big(N(F_1)\big) = 2,\ \ S\big(N(F_2)\big) = 2,$$
$$S\big(\ N(F_1) + \ N(F_2)\big) = 12$$

Demak, yechimlar soni, umumiy holda 8 (12-2-2=8) ga teng.

Bu formulani qo'llashda ehtiyot bo'lish kerak. Umumiy holda bo'lmagan sistemalar uchun yechimlar soni boshqacha bo'lishi ham mumkin. Bu holda teorema o'rinli emas.

4-misol. Quyidagi sistemaning yechimlar sonini aniqlang.

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + 6y^3 = 0 \\ 2y^2 - xy - x^2 = 0 \end{cases}$$

Yechish. $D(F_1) = \{(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)\}, D(F_2) = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$

$$D(F_1) + D(F_2) = \{(3,2), (2,3), (1,4), (0,5), (4,1), (3,2), (5,0)\}$$
$$S\big(D(F_1)\big) = 0, S\big(D(F_2)\big) = 0, S\big(D(F_1) + D(F_2)\big) = 0$$

Faqat trivial $k = 0$ yechim bor. Demak bu sistema chekli sondagi yechimlarga ega emas. Demak yechimlar cheksiz bo'lishi mumkin. Haqiqatdan ham, ikkinchi tenglama $(x + 2y)(y - x) = 0$ ko'paytuvchilarga ajraladi. Agar $x = ty$ almashtirish bajarganda $t_1 = -2, t_2 = 1$ ni hosil qilamiz, bundan $x = -2y, x = y$ kelib chiqadi. Demak, sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.М., Наука, Физматлит,1998.

2. Бернштейн И.А, Кушнеренко А.Г., Хованский А.Г. Многогранники Ньютона. УМН,31, вып.3 (1976), с.201-202.

3. Сеттарова Э.С., Абдугафаров А.М., Оркин А.В. Нахождение элементов множества точек n –мерного пространства. Доклады республиканской научно-технической конференции «Современное состояние и перспективы развития информационных технологий», Ташкент, 2011.