ДИНАМИКА ТРАЕКТОРИЙ ОПЕРАТОРА ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРА ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА СИМПЛЕКСЕ S^3 С ЧАСТИЧНО ОРИЕНТИРОВАННЫМ ГРАФОМ

Р. Н. Ганиходжаев[1], У. Р. Муминов[2], А. Эшниязов[3]
[1]Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан
[2]Ферганский государственный университет, г.Фергана, Узбекистан
[3]Гулистанский государственный университет, г.Гулистан, Узбекистан

Аннотация.

В данной работе изучается динамика траекторий непрерывного варианта операторов Лотки–Вольтерра с частично ориентированным графом в случае малых размерностей симплекса.

Ключевые слова. Частично ориентированные графы, α и ω множества траекторий, разбиение симплекса на многогранники, сигнатура точки, маршруты траекторий, бассейн неподвижной точки.

Введение

Известно, что динамическая система — это объект либо процесс, для которого однозначно определяется понятие состояния, как совокупность некоторых величин в данный момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени. В вопросах популяционной генетики, биологии, экологии и экономики, в основном, используют системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающие эволюцию исследуемого процесса. Так как при исследовании жизненных явлений часто применяют уравнения Лотки–Вольтерры. Как известно [2], каждый квадратичный стохастический оператор вольтерровского типа, заданный на конечномерном симплексе, определяет некий турнир, свойства которого позволяют изучить асимптотическое поведение траекторий этого вольтерровского оператора.

Дискретный вариант отображения определяется заданием вещественной кососимметрической матрицы $A=\left(a_{ij}\right), i, j=\overline{1,m}$ и действует на симплексе $S^{m-1}=\left\{x\in R^m : \sum_{i=1}^{m} x_i=1, x_i\geq 0\right\}$ следующими равенствами

$$x_k^{'}=x_k\left(1+\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right),\ k=\overline{1,m},\ \left|a_{ij}\right|\leq 1. \qquad (1)$$

Положим $V: S^{m-1}\to S^{m-1}$, где $Vx=x'=\left(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_m^{'}\right)$. Если $x^{(0)}\in S^{m-1}$, то $\left\{x^{(n)}\right\}$, где $x^{(n+1)}=Vx^{(n)}$, $n=0,1,...$ называется траекторией, а $\omega(x^{(0)})=\left\{x^{(n)}\right\}'$ –множество предельных точек последовательности $\left\{x^{(n)}\right\}$. $Fix(V)=\left\{x\in S^{m-1}: Vx=x\right\}$ множество неподвижных точек.

Решение системы линейных однородных неравенств

В соответствии со знаки a_{ki} кососимметрическая матрица A определяет некоторый ориентированный граф G_A. Если $a_{ki}\neq 0$ при всех $k\neq i$ то, G_A является частично ориентированным графом.

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \\ -a & c & 0 & 0 \\ b & -d & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{причем}\ 0<a,\ b,\ c,\ d\leq 1.$$

В этом случае оператор Лотки–Вольтерра $V: S^3 \to S^3$ имеет следующий вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 + ax_3 - bx_4), \\ x_2' = x_2(1 - cx_3 + dx_4), \\ x_3' = x_3(1 - ax_1 + cx_2), \\ x_4' = x_4(1 + bx_1 - dx_2). \end{cases} \qquad (2)$$

Известно, что отображение Лотки–Вольтерра является гомеоморфизмом симплекса S^{m-1}, причем любая грань симплекса инвариантна. Пусть riS^{m-1}– относительная внутренность S^{m-1} и $x^{(0)} \in riS^{m-1}$, тогда последовательность $\left\{x^{(n)}\right\}$, где $x^{(n)} = Vx^{(n-1)}$, называется положительной траекторией, $\omega(x^{(0)}) = \left\{x^{(n)}\right\}'$ –множество предельных точек. Поскольку $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ гомеоморфизмом, то $V^{-1}: S^{m-1} \to S^{m-1}$ аналогично определяет отрицательную траекторию, причём $\alpha(x^{(0)}) = \left\{x^{(-n)}\right\}'$ –множество предельных точек отрицательной траектории. Как обычно, $Fix(V) = \left\{x \in S^{m-1} : Vx = x\right\}$ неподвижные Ясно, что $J(V)$–якобиан отображения V в неподвижной точке x всегда имеет $\lambda = 1$ собственным числом.

Известно [ ], что $P = \left\{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\right\} \neq \varnothing$ и $Q = \left\{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\right\} \neq \varnothing$.

Определение 1. Набор знаков $\delta = (+ - + ... +)$ будем называть сигнатурой.

В соответствие с данной сигнатурой δ определим множество всех $x \in S^{m-1}$ таких, что $x_k' = x_k\left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right) > x_k$, если на k том месте сигнатуры стоит знак +. Знак – на k том месте означает $x_k' < x_k$. Очевидно, множество точек $x \in S^{m-1}$соответствующих данной сигнатуре является открытым и выпуклым (возможно пустым) множеством.

Определение 2. Пусть F_δ замыкание множества всех $x \in S^{m-1}$ подчинённых сигнатуре δ.

Ясно, что F_δ многогранник как решение системы линейных однородных неравенств определяемых данной сигнатурой δ. Если $F_\delta \neq \varnothing$, то $\dim F_\delta = m - 1$, причем $\bigcup_\delta T_\delta = S^{m-1}$.

Определение 3. Пусть $F_1, ..., F_k$ выпуклые многогранники построенные допустимыми сигнатурами $\delta_1, ..., \delta_k$ и $x^{(0)} \in S^{m-1}$. Порядок прохождения траектории по многогранникам будем называть маршрутом траектории. Прейдем к изучению асимптотического поведения отображения $V: S^3 \to S^3$ заданного равенствами (2).

Пусть $\delta = ad - bc$ и рассмотрим три случая $\delta = 0$, $\delta > 0$, $\delta < 0$.

Если $\delta = 0$ то, $Fix(V) = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{34} \cup M_1M_2$, где Γ_{12} ребро S^3 натянутое на вершины $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $M_1\left(\frac{d}{b+d}, \frac{b}{b+d}, 0, 0\right)$, $M_2\left(0, ,0\, \frac{d}{c+d}, \frac{c}{c+d}\right)$.

Очевидно, точки M_1 и M_2 разделяют знаки разностей $x_k^{'} - x_k$. Поэтому в случае $\delta = 0$ возможны только лишь следующие сигнатуры $\delta_1 = (+---)$, $\delta_2 = (-+-+)$, $\delta_3 = (+--+-)$, $\delta_4 = (-+++-)$, которые определяют многогранники $F_1 = co\{e_1, e_3, M_1, M_2\}$, $F_2 = co\{e_1, e_4, M_1, M_2\}$, $F_3 = co\{e_2, e_3, M_1, M_2\}$, $F_4 = co\{e_2, e_4, M_1, M_2\}$, где $e_1,...,e_4$ вершины симплекса S^3 и $co\{e_i, e_j, M_1, M_2\}$ есть выпуклая оболочка указанных точек. По определению $\bigcup_{i=1}^{4} F_i = S^3$, причём их внутренности не пересекаются, а пересечения любых двух является общей гранью.

Теорема 1. Если $x^{(0)} \notin Fix(V)$, то

i) положительная траектория не сходится,

ii) $\omega(x^{(0)}) \subset \Gamma_{13} \cup \Gamma_{14} \cup \Gamma_{23} \cup \Gamma_{24}$ и $\omega(x^{(0)})$ бесконечное множество,

iii) отрицательная траектория сходится и $\alpha(x^{(0)}) \in M_1M_2$,

iv) маршрут положительной траектории $V : F_1 \to F_2 \to F_4 \to F_3 \to F_1$.

Вершины симплекса и точки $M_1,...,M_4$ определяют знаки величин $x_k^{'} - x_k$, $k = 1,4$. Поэтому получаем следующие сигнатуры: $\delta_1 = (+--+)$, $\delta_2 = (+---)$, $\delta_3 = (+-+-)$, $\delta_4 = (++-+)$, $\delta_5 = (++--)$, $\delta_6 = (+++-)$, $\delta_7 = (-+-+)$, $\delta_8 = (-+--)$, $\delta_9 = (-+++-)$.

Соответствующие им многогранники имеют вид:

$F_1 = co\{e_1, e_3, M_3, M_4\}$, $F_2 = co\{e_3, M_1, M_3, M_4\}$, $F_3 = co\{e_2, e_3, M_1, M_4\}$,
$F_4 = co\{e_1, M_2, M_3, M_4\}$, $F_5 = co\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, $F_6 = co\{e_2, M_1, M_2, M_4\}$,
$F_7 = co\{e_1, e_4, M_2, M_3\}$, $F_8 = co\{e_4, M_1, M_2, M_3\}$, $F_9 = co\{e_2, e_4, M_1, M_2\}$.

Многогранники $\{F_i\}$ смежные, если они имеют общую двумерную грань. Отмечая смежные многогранники получаем

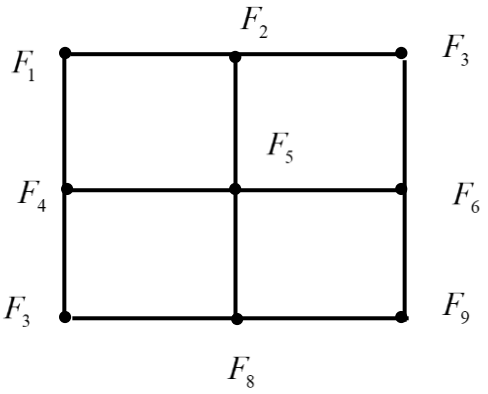

Рис.1.

По определению для любой граничной точки многогранника имеем $x_k^{'} = x_k$ хотя бы для одного индекса k. Причем все вершины многогранников $\{F_i\}$ неподвижные точки.

Аналогично получаем следующую цепочку следования траектории

$$F_1 \to F_4 \to F_7 \to F_8 \to F_9 \to F_6 \to F_3 \to F_2 \to F_1.$$

В случае $x \in F_2 \cap F_5 = co\{M_1, M_3, M_5\}$ имеем

$$x = \left(\frac{c\lambda_1}{a+c} + \frac{d\lambda_2}{b+d}, \frac{a\lambda_1}{a+c} + \frac{b\lambda_2}{b+d}, \frac{d\lambda_3}{c+d}, \frac{c\lambda_3}{c+d} \right), \ 0 \le \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \le 1, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Очевидно

$x_3^{'} = \frac{d\lambda_3}{c+d}\left(1 - \frac{\delta\lambda_2}{b+d}\right)$, $x_4^{'} = \frac{c\lambda_3}{c+d}\left(1 - \frac{\delta\lambda_1}{a+c}\right)$, поэтому $x_2^{''} - x_2^{'}$ имеет одинаковый знак с разностью $\frac{\lambda_1}{a+c} - \frac{\lambda_2}{b+d}$.

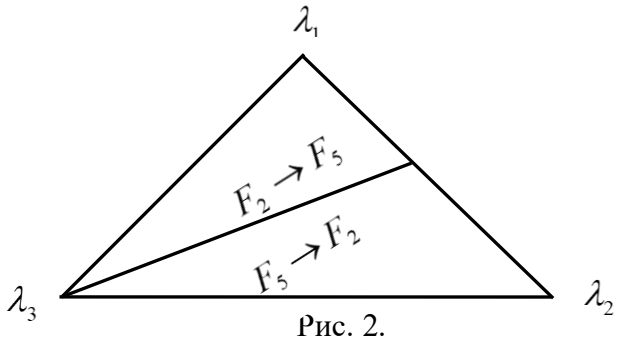

Рис. 2.

Таким образом некоторые точки под действуем оператора переходят из F_2 в F_5 причем возможен и обратный переход из F_5 в F_2. Аналогично доказывается, что существуют двусторонние переходы от F_i в F_5, и обратно, где $i = 2,4,6,8.$

Следовательно, маршрут траектории имеет следующий вид

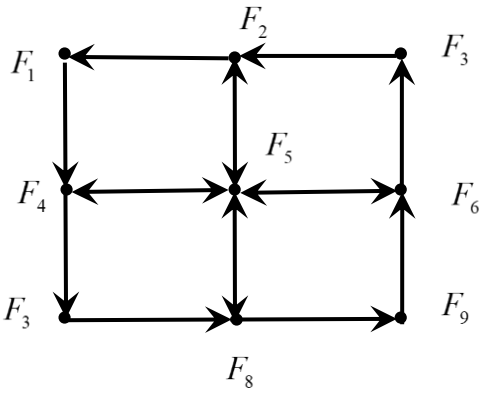

Рис. 3.

В итоге проведенных рассуждений получим следующее утверждение:

Теорема2. Если $\delta = ad - be > 0,$ то для любого $x^{(0)} \in riS^3 \setminus Fix(V)$ как положительная, так и отрицательная траектории сходятся, причем маршрут траектории определяется ориентированным графом указанным на рис. 3.

Замечание. В случае $\delta = ad - be < 0$ получаем аналогичную картину.

Заключение

Известно, что динамические системы берут свое начало в механике с работ Анри Пуанкаре, в которых утверждается, что некоторые системы после некоторого конечного времени вернутся в состояние, очень близкое к исходному. В 1988 году А. Ляпунов разработал методы, позволяющие определить устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих отраслях науки, например естественных и инженерных дисциплинах, правило эволюции динамических систем описывается либо дифференциальным, либо разностным уравнением.

В этих системах, учитывая расположение начальной точки, можно определить состояние в будущем – это и есть совокупность точек, известных как траектория или же орбита, поэтому нас и интересует нахождение равновесных состояний системы.

Наряду с дискретными динамическими системами в работе рассматривались элементы теории графов, то есть эти системы связались с такими понятиями, как турниры.

Квадратичные отображения симплекса можно применить для задач популяционной генетики, эпидемиологии, экологии, экономики. В работе исследовалось асимптотическое поведение траекторий и маршруты квадратичных отображений Лотки–Вольтерры, действующих в $(m-1)$–мерном симплексе.

Литература

1. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев, Наукова думка, 1983. – 296 с.

2. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторов, функции Ляпунова и турниры // Матем. сб., 1992, т.183, № 8. – С. 121–140.

3. А. А. Имомов., А. И. Эшниязов. Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы в пространстве l_1. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2022. № 76.С. 20-31.

4. Муминов. У. Р, Ганиходжаев Р. Н. //Маршруты траекторий операторов лотки-вольтерра действующих на симплексе ${{S}^{4}}$ // Вестник НУУз - 2024-2-1.-С. 143-151.

5. Расул Набиевич Ганиходжаев–доктор физико–математических наук, профессор. rasulganikhodzhaev@gmail.com

6. Муминов Улугбек Рахимжонович – Ферганский государственный университет кафедры математический анализ. ulugbek.muminov.2020@mail.ru

7. Абдумалик Искандарович Эшниязов– доктор философии по физико-математических наук (PhD), доцент. eshniyozovabdumalik75@gmail.com

8. Мансуров, О. П., & Адизов, Б. З. (2023). ТЕХНОЛОГИЯ ПРОИЗВОДСТВО Б1ИОЭТАНОЛА ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ ИЗ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО СЫРЬЯ. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ НАУЧНОГО И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО, 109.